Timothy Gowers

MATEMATICA

O foarte scurtă introducere

LITERA
București
2020

Mathematics
A Very Short Introduction
Timothy Gowers

LITERA

Editura Litera
O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România
tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372;
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe
www.litera.ro

Matematica
O foarte scurtă introducere
Timothy Gowers

Traducere din limba engleză:
Elena Ahire

Editor: Vidrașcu și fiii
Coordonare serie: Klieș Câmpeanu
Redactor: Teodora Nicolau
Corector: Georgiana Enache
Copertă: Bogdan Mitea
Tehnoredactare și prepress: Marin Popa

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GOWERS, TIMOTHY

Matematica: o foarte scurtă introducere /
Timothy Gowers. - București: Litera, 2020

ISBN 978-606-33-6709-0

16

Cuprins

și am încercat să transmit fascinația matematicii generale lăsând-o să vorbească de la sine.

Aș dori să mulțumesc Institutului de Matematică Clay și Universității Princeton pentru sprijinul și ospitalitatea lor în perioada scrierii acestei cărți. Le sunt foarte recunoscător lui Gilbert Adair, Rebeccăi Gowers, lui Emily Gowers, Patrick Gowers, Joshua Katz și Edmund Thomas pentru citirea versiunilor inițiale. Deși ei sunt prea inteligenți și bine informați pentru a fi considerați cititori obișnuiți, este liniștitor gândul de a ști că tot ce am scris este inteligibil pentru cel puțin unii care nu sunt matematicieni. Comentariile lor au dus la multe îmbunătățiri. Îi dedic această carte lui Emily, în speranța că îi va oferi o mică idee despre ce fac eu toată ziua.

Listă a diagramelor

Editorul și autorul își cer scuze pentru orice eroare sau omisiune din lista de mai sus. Dacă vor fi contactați, vor fi încântați să le rectifice cât mai curând.

Capitolul 1
Modele

Cum să arunci o piatră

Să presupunem că vă aflați pe un teren neted într-o zi liniștită și țineți în mână o piatră pe care ați vrea să o aruncați cât mai departe. Având în vedere cât de tare o puteți arunca, decizia cea mai importantă pe care trebuie să o luați este unghiul la care aruncați piatra. Dacă acest unghi este spre 180 de grade, atunci, chiar dacă piatra va avea o viteză orizontală mare, ea va ateriza destul de curând și, prin urmare, nu are șanse să se îndepărteze prea mult. Dacă, pe de altă parte, aruncați piatra prea sus, atunci ea va rămâne în aer mult timp, dar fără să acopere mult teren pe parcurs. În mod evident, este nevoie de un fel de compromis.

Cel mai bun compromis ce poate fi elaborat folosind o combinație de fizică newtoniană și unele calcule elementare se dovedește la fel de precis pe cât s-ar putea spera în condițiile date: direcția pietrei în timp ce vă pleacă din mână ar trebui să fie ascendentă la un unghi de 45 de grade față de orizontală. Aceleași calcule arată că piatra va urma o curbă parabolică în timp ce zboară prin aer și vă spun ce viteză va avea în orice moment după ce va pleca din mâna voastră.

Prin urmare, se pare că o combinație între știință și matematică îi va permite unei persoane să prezică întregul comportament al pietrei din momentul în care este lansată până în momentul în care aterizează. Cu toate acestea, acest lucru se întâmplă numai dacă cineva este pregătit să emită o serie de ipoteze simplificatoare, principala fiind că singura forță care acționează asupra pietrei este gravitația Pământului și că această forță are aceeași mărime și direcție peste tot. Acest lucru nu este adevărat însă pentru că nu ține cont de rezistența aerului, de rotația Pământului, de o influență gravitațională mică provenită din partea Lunii, de faptul că câmpul gravitațional al Pământului este cu atât mai slab cu cât vă aflați mai sus, iar direcția se schimbă treptat „de sus în jos" în timp ce vă deplasați dintr-o parte a suprafeței Pământului spre cealaltă. Chiar dacă acceptați calculele, recomandarea de 45 de grade se bazează pe o altă presupunere implicită, anume că viteza pietrei când pleacă din mâna voastră nu depinde de direcția pe care o are. Din nou, acest lucru nu este adevărat: putem arunca o piatră cu atât mai tare cu cât unghiul este mai obtuz.

În lumina acestor obiecții, unele categoric mai serioase decât altele, ce atitudine ar trebui să avem cu privire la calculele și previziunile care decurg din acestea? O abordare ar fi să țineți cont de cât mai multe obiecții. Totuși, o strategie mult mai rațională este exact opusul: decideți nivelul de precizie de care aveți nevoie, apoi încercați să-l atingeți într-un mod cât mai simplu. Dacă

știți din experiență că o ipoteză simplificatoare va avea doar un efect mic asupra răspunsului, atunci ar trebui să mergeți pe această presupoziție.

De exemplu, efectul rezistenței aerului asupra pietrei va fi destul de mic, deoarece piatra este mică, dură și destul de densă. Nu are rost să complicăm calculele, având în vedere rezistența la aer atunci când este probabil să existe o eroare semnificativă la nivelul unghiului la care se ajunge prin aruncarea pietrei. Dacă doriți să o luați în considerare, atunci, în majoritatea cazurilor, următoarea regulă este foarte bună: cu cât rezistența la aer este mai mare, cu atât mai obtuz ar trebui să fie unghiul pentru a compensa acest lucru.

Ce este un model matematic?

Când se examinează soluția unei probleme fizice, este deseori posibil, deși nu întotdeauna, să se facă o distincție clară între contribuțiile aduse de știință și cele aduse de matematică. Oamenii de știință elaborează o teorie, bazată în parte pe rezultatele observațiilor și experimentelor și în parte pe considerente mai generale, cum ar fi simplitatea și puterea explicativă. Matematicienii sau oamenii de știință care se ocupă de matematică cercetează apoi consecințele pur logice ale teoriei. Uneori, acestea sunt rezultatele unor calcule de rutină care prezic exact tipurile de fenomene pe care teoria a fost concepută să le explice, dar uneori previziunile unei teorii pot fi destul de neașteptate. Dacă acestea sunt confirmate ulterior prin experiment, atunci există dovezi impresionante în favoarea teoriei.

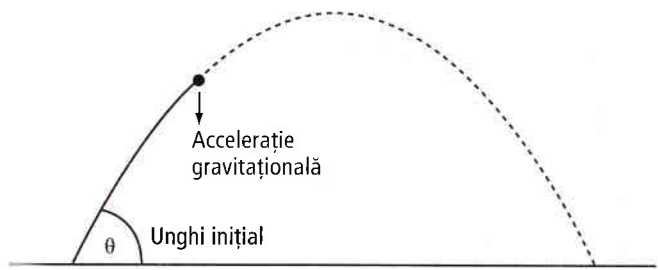
Noțiunea de confirmare a unei previziuni științifice este însă oarecum problematică din cauza nevoii de simplificări de genul celor pe care l-am discutat. Pentru a da un alt exemplu, legile mișcării și ale gravitației propuse de Newton susțin că, dacă vei arunca două obiecte de la aceeași înălțime, atunci ele vor lovi solul (dacă este neted) în același timp. Acest fenomen, evidențiat prima oară de Galileo, este oarecum contraintuitiv. De fapt, este mai mult decât contraintuitiv: dacă vei încerca singur cu, să zicem, o minge de golf și cu o minge de tenis de masă, vei constata că mingea de golf aterizează prima. Deci, în ce sens avea dreptate Galileo?

Desigur, din cauza rezistenței aerului, nu considerăm acest mic experiment o respingere a teoriei lui Galileo: experiența ne arată că teoria funcționează bine când rezistența aerului este mică. Dacă vi se pare prea convenabil să lăsați rezistența aerului să vă sară în ajutor de fiecare dată când predicțiile mecanicii newtoniene sunt greșite, atunci încrederea în știință și admirația față de Galileo vor fi restabilite dacă veți avea șansa de a urmări cum cade o pană în gol – într-adevăr, ea cade la fel cum cade o piatră.

Cu toate acestea, întrucât observațiile științifice nu sunt niciodată pe deplin directe și concludente, avem nevoie de o modalitate mai bună de a descrie relația dintre știință și matematică. Matematicienii nu aplică teoriile științifice direct asupra lumii, ci mai degrabă asupra *unor modele*. Un model în acest sens poate fi considerat o versiune imaginară și simplificată a părții de lume studiate, una în care sunt posibile calcule exacte. În cazul pietrei, relația dintre lume și model seamănă cu relația dintre figurile 1 și 2.

Există numeroase moduri de modelare a unei situații fizice date și trebuie să folosim o combinație de experiență și noi considerente teoretice pentru a decide ce model dat este probabil să ne învețe despre lumea însăși. Când alegem un model, o prioritate este de a face astfel încât comportamentul lui să corespundă

1. O minge în zbor I



2. O minge în zbor II

îndeaproape comportamentului real și observat al lumii. Cu toate acestea, alți factori, precum simplitatea și eleganța matematică, pot fi adesea mai importanți. Într-adevăr, există modele foarte utile, aproape deloc asemănătoare cu lumea, după cum vor ilustra unele dintre exemplele mele.

Aruncarea unei perechi de zaruri

Dacă arunc o pereche de zaruri și vreau să știu cum se vor comporta, atunci experiența îmi spune că există anumite întrebări pe care este nerealist să le pun. De exemplu, nimeni nu s-ar putea aștepta să-mi spună în prealabil rezultatul unei aruncări date, chiar dacă ar avea o tehnologie scumpă la dispoziție și zarurile ar fi aruncate de o mașină. În schimb, putem răspunde adesea la întrebări de natură probabilistică, de exemplu: „Cât de probabil este ca suma numerelor de pe zar să dea până în șapte?“, iar răspunsurile pot fi folositoare dacă, de exemplu, joc table pe bani. Pentru al doilea tip de întrebare, se poate modela situația foarte simplu prin reprezentarea unei aruncări de zaruri ca o alegere aleatorie a uneia dintre următoarele treizeci și șase de perechi de numere.

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

Primul număr din fiecare pereche reprezintă numărul care apare pe primul zar, iar al doilea, numărul de pe

al doilea zar. Cum exact șase dintre perechi sunt formate din două numere a căror sumă dă șapte, șansele de a obține un șapte sunt șase din 36 sau una din șase.

În privința acestui model am putea obiecta că zarurile, când sunt aruncate, se supun legilor lui Newton, cel puțin într-un grad foarte mare de precizie, astfel încât modul în care ele aterizează poate fi oricum, dar nu întâmplător: într-adevăr, acesta ar putea fi, în principiu, calculat. Totuși, sintagma „în principiu“ este suprasolicitată, întrucât calculele sunt extraordinar de complicate și trebuie să se bazeze pe informații mai precise despre forma, compoziția, viteza inițială și rotirile zarului decât ar putea vreodată fi măsurate în practică. Iată de ce folosirea unui model determinant mai complicat nu prezintă nici un avantaj.

Estimarea creșterii populației

Științele mai „soft“, cum ar fi biologia și economia, abundă în modele matematice mult mai simple decât fenomenele pe care le reprezintă sau chiar inadecvate în anumite moduri, dar utile și edificatoare. Pentru a lua un exemplu biologic de mare importanță economică, să ne imaginăm că dorim să estimăm populația unei țări pe o perioadă de 20 de ani. Un model foarte simplu pe care l-am putea folosi reprezintă întreaga țară ca pereche de numere $(t, P(t))$. Aici, t reprezintă timpul și $P(t)$ reprezintă dimensiunea populației la momentul t. În plus, avem două numere, n și m, pentru a reprezenta rata natalității și pe cea a mortalității. Acestea sunt definite ca fiind numărul de nașteri și de decese pe an, ca o proporție a populației.

Să presupunem că știm că populația de la începutul anului 2002 este P. Conform modelului tocmai definit, numărul nașterilor și al deceselor în cursul anului va fi nP și, respectiv, mP, deci populația la începutul anului 2003 va fi $P + nP - mP = (1 + n - m)P$. Acest tip de demonstrație funcționează pentru orice an, deci avem formula $P(a + 1) = (1 + n - m)\,P(a)$, ceea ce înseamnă că populația de la începutul anului $a + 1$ este $(1 + n - m)$ ori populația la începutul anului a. Cu alte cuvinte, în fiecare an populația se înmulțește cu $(1 + n - m)$. Rezultă că, peste 20 de ani, aceasta se înmulțește cu $(1 + n - m)^{20}$, ceea ce oferă un răspuns la întrebarea noastră inițială.

Chiar și acest model de bază este suficient de bun pentru a ne convinge că, dacă rata natalității este semnificativ mai mare decât rata mortalității, populația va crește extrem de rapid. Cu toate acestea, modelul este nerealist în moduri care pot face predicțiile foarte inexacte. De exemplu, presupunerea că rata natalității și cea a mortalității vor rămâne aceleași timp de 20 de ani nu este foarte plauzibilă, căci în trecut ele au fost adesea afectate de schimbările sociale și de evenimentele politice, precum progrese în medicină, boli noi, creștere medie a vârstei la care femeile încep să aibă copii, stimulente fiscale și uneori războaie pe scară largă. Un alt motiv pentru a ne aștepta ca rata natalității și cea a mortalității să varieze în timp este acela că vârstele oamenilor din țară pot fi distribuite destul de inegal. De exemplu, dacă a existat o explozie demografică cu 15 ani mai devreme, există anumite motive pentru a ne aștepta ca natalitatea să crească peste 10–15 ani.

Prin urmare este tentant să complicăm modelul prin introducerea altor factori. Am putea avea rate de nașteri și de decese $n(t)$ și $m(t)$ care să varieze de-a lungul timpului. În loc de un singur număr $P(t)$ care reprezintă dimensiunea populației, am putea ști și câte persoane există în diferite grupuri de vârstă. De asemenea, ar fi util să cunoaștem cât mai multe detalii despre atitudinile și comportamentul social din cadrul acestor grupe de vârstă, pentru a ne da seama care ar putea fi rata natalității și rata mortalității în viitor. Obținerea acestui tip de informații statistice este costisitoare și dificilă, dar informațiile obținute pot îmbunătăți mult acuratețea estimărilor. Din acest motiv, nici un model nu iese în evidență ca mai bun decât celelalte. În ce privește schimbările sociale și politice, este imposibil să spunem cu siguranță care vor fi acestea. Astfel, cel mai important lucru pe care îl putem cere în mod rezonabil de la orice model este predicția de tip condițional, anume cel care ne spune care vor fi efectele schimbărilor sociale și politice dacă acestea vor avea loc.

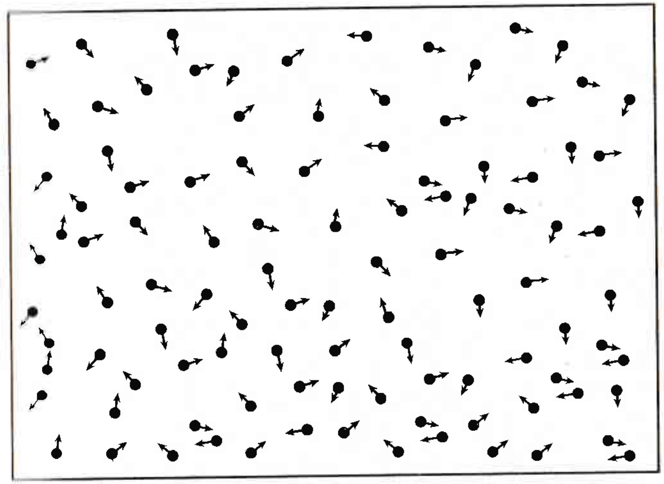
Comportamentul gazelor

Conform teoriei cinetice a gazelor, propusă de Daniel Bernoulli în 1738 și dezvoltată de Maxwell, Boltzmann și alții în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, un gaz este format din molecule în mișcare, și multe dintre proprietățile sale, cum ar fi temperatura și presiunea, sunt proprietăți statistice ale acelor molecule. Temperatura, de exemplu, corespunde mediei vitezelor moleculelor individuale la pătrat.

Pornind cu această idee în minte, să încercăm să concepem un model de gaz conținut într-o cutie cubică. Cutia ar trebui să fie reprezentată desigur de un cub (mai degrabă unul matematic decât unul fizic) și, întrucât moleculele sunt foarte mici, este firesc să le reprezentăm prin puncte în acest cub. Aceste puncte trebuie să se miște, așa că trebuie să decidem regulile care guvernează modul în care se mișcă. În acest moment trebuie să facem câteva alegeri.

Dacă ar fi doar o singură moleculă în cutie, atunci ar exista o regulă evidentă: aceasta se deplasează cu o viteză constantă și ricoșează din pereții cutiei când se lovește de ei. Așadar, cea mai simplă modalitate de a generaliza acest model este să luăm *N* molecule, unde *N* este un număr mare, și să presupunem că toate se comportă astfel, fără nici o interacțiune între ele. Pentru a începe modelul cu molecula *N*, trebuie să alegem pozițiile și viteza inițiale pentru aceste molecule sau, mai degrabă, punctele care le reprezintă. O modalitate bună de a face acest lucru este de a alege la întâmplare pentru că ne-am aștepta ca, în orice moment, moleculele unui gaz real să se răspândească și să se miște în multe direcții.

Nu este greu de formulat ce se înțelege când ne referim la un punct aleatoriu sau la o direcție aleatorie în cub, dar este mai puțin limpede cum să alegeți o viteză la întâmplare, căci viteza poate lua orice valoare cuprinsă între 0 și infinit. Pentru a evita această dificultate, să avansăm ipoteza, imposibilă din punct de vedere fizic, că toate moleculele se mișcă cu aceeași viteză și că doar pozițiile și direcțiile inițiale sunt alese aleatoriu. O versiune bidimensională a modelului rezultat este ilustrată în figura 3.



3. Model bidimensional al unui gaz

Presupunerea că moleculele noastre *N* se mișcă absolut independent una de cealaltă este cu siguranță o simplificare. De exemplu, înseamnă că nu există nici o speranță de a folosi acest model pentru a înțelege de ce un gaz devine lichid la temperaturi suficient de scăzute: dacă încetiniți viteza punctelor din model, obțineți același model, dar cu o mișcare mai lentă. Cu toate acestea, modelul explică mare parte din comportamentul gazelor reale. De exemplu, imaginați-vă ce s-ar întâmpla dacă am micșora treptat cutia. Moleculele ar continua să se miște cu aceeași viteză, dar acum, întrucât cutia este mai mică, ele ar lovi pereții mai des și suprafața de lovit ar fi mai mică. Din aceste două motive, numărul de ciocniri pe secundă în orice zonă a pereților ar fi mai mare. Aceste coliziuni țin cont de presiunea pe care o exercită un gaz, astfel încât putem concluziona că, dacă înghesuiți un gaz într-un volum mai mic, atunci s-ar putea ca presiunea acestuia să crească – după cum se confirmă prin observație. O demonstrație similară explică de ce, dacă se crește temperatura unui gaz fără a-i crește volumul, crește și presiunea. Și nu este prea greu de stabilit care ar trebui să fie relațiile numerice dintre presiune, temperatură și volum.

În mare, modelul de mai sus îl aproximează pe cel al lui Bernoulli. Una dintre realizările lui Maxwell a fost descoperirea unei demonstrații teoretice elegante care rezolvă problema modului de a alege mai realist viteza inițială. Pentru a înțelege acest lucru, să începem prin a renunța la presupunerea noastră că moleculele nu interacționează. În schimb, vom presupune că, din când în când, ele se ciocnesc, ca o pereche de bile minuscule de biliard, după care pleacă cu alte viteze și în alte direcții supuse legilor conservării energiei și impulsului, dar aleatorii în rest. Desigur, nu este ușor de văzut cum vor face ele acest lucru dacă sunt puncte individuale care nu ocupă nici un volum, dar această parte a demonstrației este necesară doar ca justificare informală pentru caracterul aleatoriu la nivelul vitezei și direcțiilor moleculelor. Cele două ipoteze foarte plauzibile ale lui Maxwell despre natura acestui caracter întâmplător au fost că aceasta nu ar trebui să se schimbe în timp și că nu ar trebui să facă diferența între o direcție și alta. Cu aproximație, a doua dintre aceste ipoteze înseamnă că dacă d_1 și d_2 sunt două direcții și v este o anumită viteză, atunci șansele ca o particulă să circule cu viteza v în direcția d_1 sunt aceleași cu șansele ca aceasta să circule cu viteza v în direcția d_2. În mod surprinzător, aceste două ipoteze sunt suficiente pentru a determina exact modul în care trebuie distribuite vitezele. Altfel

spus, ele ne spun că, dacă vrem să alegem viteza la întâmplare, există doar o singură modalitate naturală de a o face. (Acestea ar trebui alocate în funcție de distribuția normală. Aceasta este distribuția care produce faimoasa „curbă în formă de clopot", curba Gauss care apare într-un număr mare de contexte diferite, atât matematice, cât și experimentale.)

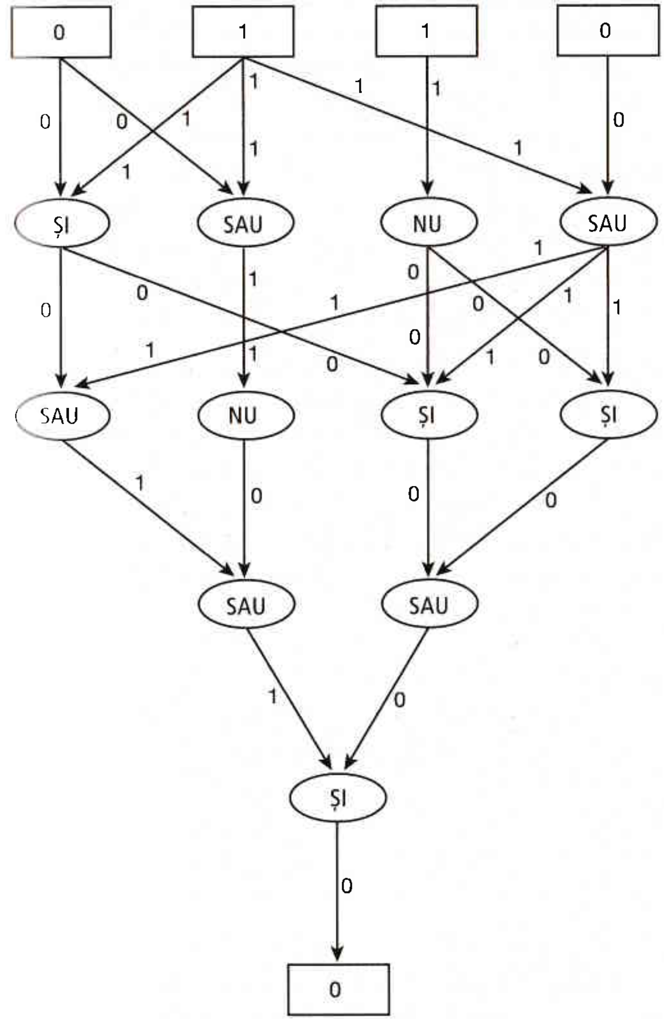
După ce am ales vitezele, putem uita din nou toate interacțiunile dintre molecule. Prin urmare, acest model ușor îmbunătățit împărtășește multe dintre defectele primului. Pentru a le remedia, nu avem de ales decât să modelăm oarecum interacțiunile. Reiese că până și modele foarte simple de sisteme de particule care interacționează se comportă într-un mod fascinant și generează probleme matematice extrem de dificile, în mare parte nesoluționate.

Modelarea creierelor și a calculatoarelor

Un calculator mai poate fi gândit ca o colecție formată din numeroase părți simple care interacționează și, în mare parte, din acest motiv, și informatica teoretică este plină de probleme importante nesoluționate. Un bun exemplu de întrebare la care v-ar plăcea să vi se răspundă este următorul. Să presupunem că cineva alege două numere prime p și q, le înmulțește și vă dă răspunsul pq. Puteți apoi să aflați valoarea lui p și q luând fiecare număr prim pe rând și văzând dacă se potrivește exact în pq. De exemplu, dacă vi se propune numărul 91, puteți stabili rapid că nu este multiplu de 2, 3 sau 5 și prin urmare este egal cu 7 × 13.

Totuși, dacă p și q sunt numere foarte mari – cu 200 de cifre fiecare, să spunem –, atunci acest proces de încercare și eroare durează un timp de neimaginat, chiar și cu ajutorul unui calculator performant. (Dacă doriți să vă simțiți în dificultate, încercați să găsiți două numere prime care, înmulțite, dau 6 901 și alte două care dau 280 123.) Pe de altă parte, nu este de neconceput că există un mod mult mai inteligent de abordare a problemei, unul care ar putea fi folosit ca bază pentru un program de calculator care să nu dureze prea mult timp pentru a fi rulat. Dacă s-ar putea găsi o asemenea metodă, aceasta ne-ar permite să spargem codurile pe care se bazează majoritatea sistemelor de securitate moderne, pe internet și în alte părți, căci dificultatea de descifrare a acestor coduri depinde de dificultatea de factorizare a numerelor mari. Prin urmare, ar fi liniștitor dacă ar exista o modalitate prin care să se arate că nu există o procedură rapidă și eficientă pentru calcularea lui p și q din produsul lor pq. Din păcate, deși calculatoarele ne surprind în permanență prin toate lucrurile la care pot fi folosite, nu se știe aproape nimic despre ce nu pot face.

Înainte de a putea începe să ne gândim la această problemă, trebuie să găsim o modalitate de a reprezenta matematic un calculator, și într-un mod cât mai simplu. Figura 4 prezintă una dintre cele mai bune modalități de a face acest lucru. Calculatorul este format din straturi de noduri legate între ele prin linii care se numesc margini. În stratul superior se află „intrarea“ *(input)*, care este o succesiune de 0 și 1, iar în stratul inferior se află „ieșirea“ *(output)*, care este altă succesiune de 0 și 1. Nodurile sunt de trei feluri, numite porți ȘI, SAU și NU.



4. Un program timpuriu de calculator